3 ELEMENTS DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

L'espace-temps doit être décrit par une structure mathématique qui ressemble localement à $\mathcal{M}^{1,3}$, mais qui peut posséder une courbure non triviale sur des régions étendues. Le type d'objet capturant ces propriétés est une variété, qui est le sujet de la géométrie différentielle.

3.1 Variété différentielle

DEF Une variété différentielle M de dimension n est :

① un espace topologique (ensemble avec une collection d'ouvert de cet ensemble satisfaisant certains axiomes)

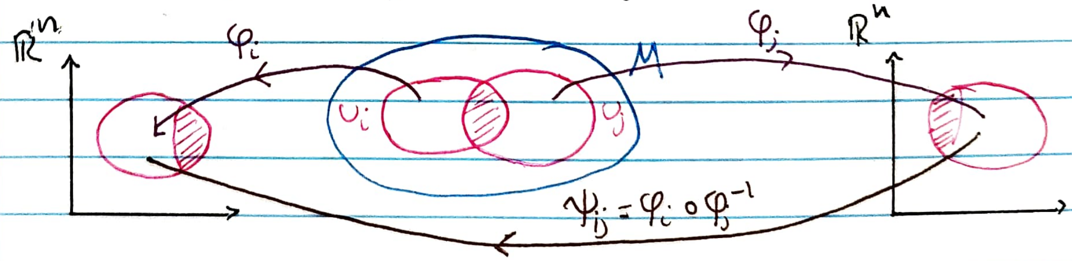
② muni d'une famille de paires $\{(U_i, \varphi_i)\}$ appelée atlas, chacune de ces paires étant une carte, telles que :

(2.1) $\{U_i\}$ est une famille d'ouverts couvrant M ($\bigcup_i U_i = M$) et φ_i est un homéomorphisme (app. continue inversible entre 2 espaces topologique, dont l'inverse est continue)

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$$

Les cartes permettent d'assigner des coord. à tout point de $U_i \subset M$

(2.2) Etant donné U_i et U_j tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, l'application $\psi_{ij} \equiv \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n \to \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n$ est infiniment différentiable $\psi_{ij} \in \mathcal{C}^\infty$



→ La condition (2.1) impose que "M ressemble localement à $\mathbb{R}^n$"

→ La condition (2.2) impose que les différents 'morceaux de $\mathbb{R}^n$' puissent être assemblé ensemble de manière lisse

DEF Soit M une variété, et $\{(U_i,\varphi_i)\}$, $\{(V_i,\psi_i)\}$ 2 atlas. Les 2 atlas sont dit compatibles si leur union est encore un atlas.
La compatibilité est une relation d'équivalence, les classes d'équivalences étant appelées structures différentielles.

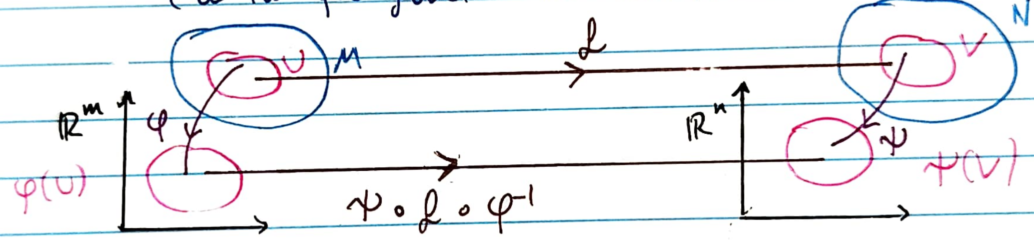
→ La liberté de changer d'atlas équivaut à la liberté physique de changer de référentiel.

3.2 Applications entre variétés

DEF Soit l'application $f: M \to N$ où M, N sont des variétés. f est dite différentiable si :

① $f \in C^0$

② $\forall$ carte (U,φ) de M, $\forall$ carte (V,ψ) de N telle que $f(U) \subset N$,
$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ est différentiable C^∞
(en tant que fonction $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$).



DEF Soit M, N deux variétés différentielles. Une application $f: M \to N$ est un difféomorphisme si

① f est bijective

② $f \in C^\infty$ et $f^{-1} \in C^\infty$

→ 2 variétés difféomorphes sont considérées comme équivalentes

→ On définit le groupe des changements de coord. $\mathrm{Diff}(M)$ selon :

$$\mathrm{Diff}(M) \equiv \{ f : M \to M \,/\, f \text{ est un difféomorphisme} \}$$

En effet, un difféo de M applique un atlas sur un autre atlas :

$$x^\mu(p) \mapsto x^{\mu'}(x^\alpha(p)) \quad \forall p \in M$$

↳ En RG, on imposera une invariance sous difféomorphisme.

↳ Les difféo sur M peuvent être vu de 2 manières :

⊙ Transformation active des coordonées:

Soit $P \in (U, \varphi)$ une carte locale: $\varphi(P) \equiv \underbrace{x^\mu(p)}_{\text{coordonées de } P} \in \mathbb{R}^m$

$p \xrightarrow{f} f(p)$

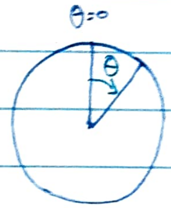
Soit le difféomorphisme $f : M \to M : P \mapsto f(P)$ nouveau point
avec $\varphi(f(p)) \equiv y^\mu(p) = x^\mu(f(p)) \in \mathbb{R}^m$

⊙ Transformation passive des coordonées:

Soit le point $P \in U \cap V$, avec les cartes (U, φ), (V, ψ). Alors:
$\varphi(P) = x^\mu(P)$ et $\psi(P) = y^\mu(P)$ même point, coord $\neq$.
↳ x^μ et y^μ sont reliées par une application lisse:
$f \equiv \varphi \circ \psi^{-1} : y^\mu \mapsto x^\mu$, $f \in C^\infty$

⊙ Exemples de variétés:

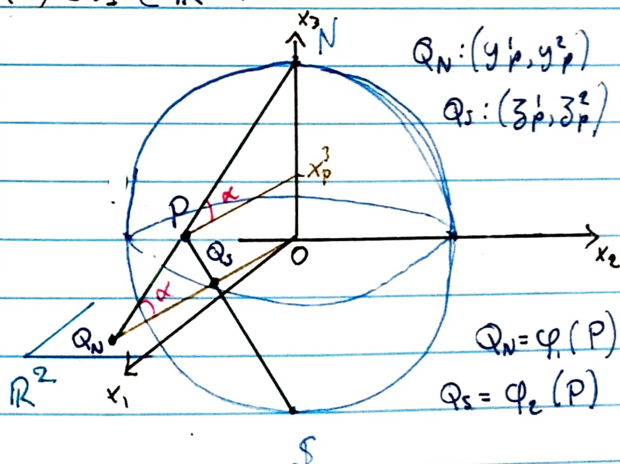
① Le cercle S^1:



Si $U = S^1$ et $\varphi = \Theta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, alors l'image $\Theta(S^1)$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$. On doit alors considérer 2 cartes (minimum), par exemple
$U_1 = \theta \in [\epsilon, -\epsilon]$ et $U_2 = \theta \in [\pi - \epsilon, \pi + \epsilon]$

② La sphère $S^2 \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^3 = 1 \subset \mathbb{R}^3$:

→ On utilise la projection stéréographique à partir du pole nord N, donnée par la carte φ_1, et une autre à partir du pole sud S: φ_2
On a alors:
$U_1 = S^2 \setminus \{N\}$ et $U_2 = S^2 \setminus \{S\}$



↳ Puisque $NPx^3_p \sim NQ_NO$, on a:
$$y^1_p = \frac{x^1_p}{1 - x^3_p} \quad \text{et} \quad y^2_p = \frac{x^2_p}{1 - x^3_p}$$
$$\to \varphi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^2 : (x^1_p, x^2_p, x^3_p) \mapsto \left(\frac{x^1_p}{1 - x^3_p} ; \frac{x^2_p}{1 - x^3_p}\right)$$

↳ De même, on obtient $\varphi_2 : U_2 \to \mathbb{R} : (x^1_p, x^2_p, x^3_p) \mapsto \left(\frac{x^1}{1 + x_3} ; \frac{x^2}{1 + x_3}\right)$

→ Il faut s'assurer que $\psi_{12} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(U_1 \cap U_2)$
On peut montrer que $\psi_{12}(y^1, y^2) = \left(\frac{y^1}{(y^1)^2+(y^2)^2}, \frac{y^2}{(y^1)^2+(y^2)^2} \right)$

3.3 Vecteur 2.0

But : définition de vecteur intrinsèque à M, sans plongement de la variété dans un espace de dimension supérieure

DEF Soit la courbe $\mathcal{C} : \mathbb{R} \to M : \lambda \mapsto \mathcal{C}(\lambda)$ et soit la fonction $f : M \to \mathbb{R}$. Un vecteur tangent X au point $p \equiv \mathcal{C}(\lambda_0)$ est défini comme l'opérateur différentiel du 1e ordre agissant sur des fonctions définie dans un voisinage de p :

$$X_p f \equiv \left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} f(\mathcal{C}(\lambda))$$

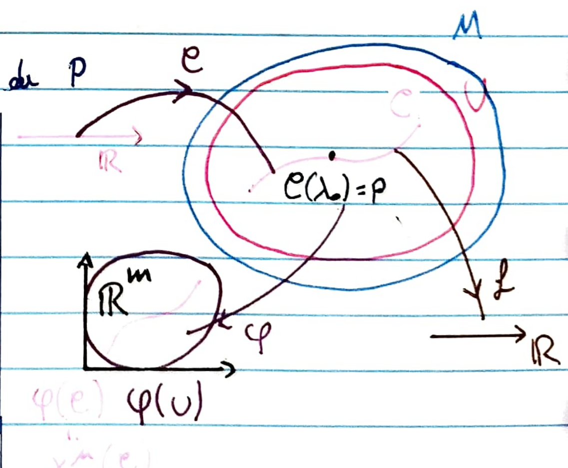
→ Un vecteur tangent est une dérivée directionelle d'une fonction le long d'une courbe $\mathcal{C}(\lambda)$ en $\lambda = \lambda_0$. On note parfois $X = \frac{d}{d\lambda}$

↳ Toute courbe sur M passant par P définit donc un opérateur différentiel du 1e ordre agissant sur $\mathrm{Func}(M) = \{ f \in \mathcal{C}^\infty(M) \}$

→ On identifie l'espace tangent en P T_pM à l'espace des opérateurs de dérivées directionelles le long de courbes passant par P.

⊙ Dimension et base de T_pM ?

→ Soit (U, φ) une carte autour de P



Regardons l'action d'un vecteur X sur $f : M \to \mathbb{R}$ dans U :

$$X_p f = \left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} f(\mathcal{C}(\lambda))$$

$$= \left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda_0} (f \circ \mathcal{C})(\lambda)$$

$$= \left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda_0} \Big[\underbrace{f \circ \varphi^{-1}}_{\equiv \tilde{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}} \circ \overbrace{\varphi \circ \mathcal{C}}^{x^\mu(\mathcal{C}(\lambda))} \Big]$$

$$= \left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda_0} \tilde{f}(x^\mu(\lambda)) = \left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^\mu}\right| \left.\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right|_{\lambda_0} \rightsquigarrow X f = \frac{d}{d\lambda} f = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu f$$

On écrit $\tilde{f} = f$ par abus du langage

→ Puisque la fct f est arbitraire, on a donc

$$X = \frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\partial_\mu \qquad \text{avec } x^\mu = x^\mu(\mathcal{C}(\lambda))$$

→ $\dfrac{dx^\mu(\mathcal{C}(\lambda))}{d\lambda}$ sont les composantes du vecteur X

→ Les opérateurs de dérivée partielle ∂_μ fait une base de T_pM de dimension m : $T_pM = \text{span}\{\partial_\mu\}$. On appelle base coordonée $\{\partial_\mu\}$

→ Sous un difféo $x^\mu \mapsto x^{\mu'}$, les composantes $X^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\lambda}$ se transforment selon : $X^{\mu'} = \dfrac{dx^{\mu'}}{d\lambda} = \dfrac{dx^\mu}{d\lambda}\cdot\dfrac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} = X^\mu \dfrac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}$

Les vecteurs de base se transforment selon :

$$\partial_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\cdot\partial_\mu$$

↳ X est invariant sous difféomorphisme.

$$X^{\mu'} = X^\mu \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}$$

$$\partial_{\mu'} = \partial_\mu \cdot \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}$$

Note : Les vecteurs de T_pM peuvent être vus comme des applications

$$X_p : \begin{pmatrix} \text{Func}(M) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto X_p f = X_p^\mu \partial_\mu f\big|_{x^\mu = x^\mu(p)} \end{pmatrix}$$

DEF Un champ de vecteur est un application

$$\mathfrak{X}(M) : \begin{pmatrix} \mathcal{C}^\infty(M) & \to \mathcal{C}^\infty(M) \\ f & \mapsto Xf \end{pmatrix}$$

3.4 Covecteurs et tenseurs

→ On rappelle qu'un covecteur est un élément de l'espace dual à T_pM : $\omega \in T_p^*M : T_pM \to \mathbb{R} : X \mapsto \omega(X) \in \mathbb{R}$.

→ Exemple : différentielle d'une fonction :

$$df : T_pM \to \mathbb{R} : X \mapsto df(X) \equiv X(f) = X_p^\mu \partial_\mu f_p \in \mathbb{R}$$

En coordonée, dans une base locale, on écrit :

$$df = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^\mu}}_{\text{composante}} dx^\mu$$

base coordonée de T_p^*M ; duale de $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$

↳ Relation entre bases duales: $dx^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu$

→ Transformation sous difféo des :
composantes d'un covecteur : $\omega_\alpha \mapsto \omega_{\alpha'} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}$

covecteurs de bases : $dx^\mu \mapsto dx^\mu \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}$

→ On peut voir les vecteurs comme des formes linéaires sur les covecteurs: $X : T^*_pM \to \mathbb{R} : \omega \mapsto X(\omega) \hat{=} \omega(X)$
↳ On peut écrire : $T^{**}_pM \simeq T_pM$

DEF Un tenseur (p,q) est une forme multilinéaire:

$$T : \underbrace{T^*_pM \otimes \cdots \otimes T^*_pM}_{p} \otimes \underbrace{T_pM \otimes \cdots \otimes T_pM}_{q} \to \mathbb{R}$$

dont les composantes se transforment selon:

$$T^{\mu_1'\cdots\mu_p'}{}_{\nu_1'\cdots\nu_q'} = \frac{\partial x^{\mu_1'}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_p'}}{\partial x^{\mu_p}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu_1'}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_q}}{\partial x^{\nu_q'}} T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$$

3.5 Forme différentielle et dérivée extérieure

DEF Une p-forme différentielle est un tenseur de type $(0,p)$ totalement antisymétrique

ex: pour une 2-forme : $F(X,Y) = -F(Y,X) \quad \forall X,Y \in T_pM$

en composante: $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ où $F = F_{\mu\nu}\, dx^\mu \otimes dx^\nu$

↳ $F(\partial_\alpha, \partial_\beta) = F_{\mu\nu}\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu = F_{\alpha\beta} \overset{!}{=} F(\partial_\beta, \partial_\alpha) = F_{\beta\alpha}$

$F_{\mu_1,\dots,\mu_p}$ totalement antisymétrique en ses indices

→ Une 1-forme est simplement un covecteur
→ On définit les 0-formes comme étant les fonctions

DEF On note l'espace vectoriel des p-formes au point P $\Omega^p_P(M)$

Pour en déterminer une base, on va introduire wedge produit.

DEF On définit le wedge produit $\wedge$ de 1-formes

$$dx^{\mu_1}\wedge\dots\wedge dx^{\mu_r} \equiv \sum_{s\in S_r} \mathrm{sgn}(s)\, dx^{\mu_{s(1)}}\otimes\dots\otimes dx^{\mu_{s(r)}}$$

où S_r est le groupe des permutations de r éléments ($|S_r| = r!$)

→ Exemple : 2-forme : $dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu\otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu$

→ Une p-forme peut tjs être développée dans une base de Ω^r_p :

$$\omega\in\Omega^p_p(M) \Rightarrow \omega = \frac{1}{p!}\,\omega_{\mu_1\dots\mu_p}\, dx^{\mu_1}\wedge\dots\wedge dx^{\mu_p}$$

→ La dimension de cette base est le # de manière de prendre r distincts parmi $\dim(M)=m$: $\dim(\Omega^r_p) = \binom{r}{m} = m!/r!(m-r)!$

→ Exemple : 2-forme à 3-D : une base est $\{dx\wedge dy, dx\wedge dz, dy\wedge dz\}$

→ Propriétés :

① Il n'existe pas de p-forme telles que $p > m$

② $\Omega^1_p = T^*_pM$

③ $\Omega^0_p = \mathbb{R}$

④ Abus de langage : p-forme et champ de p-forme.

DEF 1. On définit un champ de p-formes $\Omega^r(M)$ par la donnée d'une p-forme en tout point $p\in M$.

⊙ Dérivée extérieure :

DEF La dérivée extérieur d'un champ de p-forme est une application

$$d : \Omega^r \to \Omega^{r+1}$$

$$\omega \mapsto d\omega \equiv \frac{1}{p!}\,\partial_\nu\, \omega_{\mu_1\dots\mu_p}\, dx^\nu\wedge dx^{\mu_1}\wedge\dots\wedge dx^{\mu_p}$$

ou encore : $d\omega = \frac{1}{(p+1)!}\,(d\omega)_{\nu\mu_1\dots\mu_p}\, dx^\nu\wedge dx^{\mu_1}\wedge\dots\wedge dx^{\mu_p}$

ou encore $(d\omega)_{\nu\mu_1\dots\mu_p} = (p+1)\,\partial_{[\nu}\,\omega_{\mu_1\dots\mu_p]}$ ← antisymétrisation

→ Pour $p=0$: $\omega \in \mathrm{Func}(M) \Rightarrow \omega = f$

$p=1$: $df = \partial_\mu f \, dx^\mu \in T^*M$

→ Exemple : $A_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = B_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$

$\Leftrightarrow (\cancel{A_{(\mu\nu)}} + A_{[\mu\nu]}) dx^\mu \wedge dx^\nu = (\cancel{B_{(\mu\nu)}} + B_{[\mu\nu]}) dx^\mu \wedge dx^\nu$

$\Rightarrow A_{[\mu\nu]} = B_{[\mu\nu]}$ (égalité seulement sur la partie antisym).

→ Importance de la dérivée extérieure :

$$d(\Omega^p) = \Omega^{p+1}$$

La dérivé extérieur définit un operation de differentiation qui est tensorielle et donc valable dans tout système de coord.

Il faut que nos quantité (par ex. le $\mathcal{L}$) soit des relations tensorielles pour n'importe quel changement de référentiel (pas seulement celle de Poincaré)

Regardons l'exemple suivant :

$$\partial_\mu W_\nu \mapsto \partial_{\mu'} W_{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} W_\nu \right)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \partial_\mu W_\nu}_{\text{transformation tensorielle}} + \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} W_\nu \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x^\mu \partial x^{\nu'}}}_{\text{partie non-tensorielle, qui disparait pour } \partial_{[\mu} W_{\nu]}}$$

→ d n'est définie que pour les formes, pas les tenseurs en général

PROP : La dérivée extérieure agissant sur toute forme : $d^2 = 0$

DEF 1 Une p-forme ω est dite $\begin{cases} \text{fermée si } d\omega = 0 \\ \text{exacte si } \exists (p+1)\text{forme} \,/\, \omega = d\eta \end{cases}$

↳ Ainsi, toute forme exacte est fermée, mais le contraire est faux en général (vrai localement).

↳ L'espace vect. des p-forme $\begin{cases} \text{fermées sur } M \text{ est noté } Z^p(M) \\ \text{exactes sur } M \text{ est notés } B^p(M) \end{cases}$

On a $B^p(M) \subseteq Z^p(M)$

↳ Le $p^{\text{ème}}$ groupe de cohomologie de De Rham est le quotient

$$H^p(M) = Z^p(M) / B^p(M)$$

3.6 Métrique

DEF Une métrique pseudo-Riemanienne est un champ de tenseurs $(0,2)$ satisfaisant, $\forall P \in M$,

① $g_P(X,Y) = g_P(Y,X) \quad \forall X,Y \in T_PM$ tenseur symétrique

② $g_P(X,Y) = 0 \,, \forall X \in T_PM \to Y = 0$ non dégénéré

→ Dans une carte locale $\varphi : U \subset M \to \mathbb{R}^m : P \mapsto \varphi(P) = x^\mu(P)$, les composantes de la métrique sont :

$$g(\partial_\alpha, \partial_\beta) = g_{\mu\nu}\, dx^\mu \otimes dx^\nu (\partial_\alpha, \partial_\beta) = g_{\alpha\beta}$$

→ Puisque g est non-dégénéré, $\det(g_{\mu\nu}) \equiv g \neq 0$ et la matrice $g_{\mu\nu}$ est inversible. On note $g^{\mu\nu}$ la matrice inverse.

→ La métrique établit un isomorphisme entre T_PM et T_P^*M et permet de monter et descendre les indices. Par exemple :

$$g : \begin{pmatrix} T_PM \mapsto T^*_PM \\ \underbrace{X}_{\text{vecteur } X^\mu\partial_\mu} \mapsto g(X,\cdot) \end{pmatrix} \text{ de composante : } \quad X^\mu \mapsto g_{\mu\nu} X^\mu \hat{=} X_\nu$$

→ En un point $P \in M$, la métrique peut tjs être ramenée à sa forme canonique dans laquelle elle s'écrit

$$g_{\mu\nu} = \operatorname{diag}(-1, \cdots, -1, 1, \cdots, 1)$$

↳ Si uniquement $+1$: Riemanienne ou euclidienne
↳ Si $(-1, 1, \cdots, 1)$: Lorentzienne
↳ Le nombre de "$-$" et de "$+$" définissent la signature de la métrique

→ Exemple : si $g_{\mu\nu} = \operatorname{diag}(\lambda_1, -, \lambda_m)$, alors $g = g_{\mu\nu}\, dx^\mu \otimes dx^\nu = \lambda_1 (dx^1)^2 + \dots$

On pose $x'^1 = \sqrt{|\lambda_1|}\, x^1$. Alors

$$g_{1'1'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^1} g_{\mu\nu} = \frac{1}{|\lambda_1|} \cdot \lambda_1 = \pm 1$$

Les valeurs propres peuvent être "rescalées" à ± 1 par un changement de coordonnées.